

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Кудін В.Г.

Додаткові матеріали для підготовки до лабораторних робіт.

Лабораторна робота № 11

«Визначення в'язкості повітря за формулою Пуазейля»

Київ — 2025

Рецензенти:

Кравченко В.М., канд. фіз.-мат. наук., доц.

Лосицький М.Ю., канд. фіз.-мат. наук, асист.

Рекомендовано до друку Вченою радою фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № від року)

Кудін Володимир Григорович

Додаткові матеріали для підготовки до лабораторних робіт. Лабораторна робота № 11 «Визначення в'язкості повітря за формулою Пуазейля» —К, 2025. —13 с.

© Кудін В.Г., 2025

Зміст

Зміст	3
Вступ.....	4
1. Опис руху рідин (газів). Неідеальні рідини (гази)	5
1.1 Рівняння нерозривності.....	6
1.2 Внутрішнє тертя. Рух неідеальної рідини	7
2. Рух неідеальних рідин (газів) в трубках. Формула Пуазейля	9
2.1 Характер зміни швидкості.....	10
2.2 Формула обчислення об'єму рідини (газу), що протікають через циліндричну трубку за одиницю часу	12
Література.....	13

Вступ

Програмою вивчення курсу фізики студентами декількох факультетів та інститутів Київського національного університету імені Тараса Шевченка передбачене виконання лабораторних робіт з цього предмету. Протягом багатьох років кафедра загальної фізики фізичного факультету забезпечує їх проведення. Викладачами цієї кафедри до лабораторних робіт були підготовлені описи і методичні вказівки [1], інженери кафедри допомагають студентам опановувати потрібне обладнання.

Проводячи лабораторні заняття, викладачу завжди приємно відмічати зацікавленість студентів, що виникає у них під час практичного знайомства з тими чи іншими явищами. Цей сприятливий момент хотілося б використати для стимулювання подальшого поглиблення їх знань. Але не завжди для цього є сприятливі умови. Потрібний матеріал в підручниках не завжди чітко локалізований, а на знайомство з більш широким колом питань у студентів, зазвичай, часу не вистачає. Було б добре, що б в наявності був більш розширений матеріал по темі лабораторної роботи, і в той же час, досить сконцентрований біля явищ, що в ній зустрічаються. Працюючи з таким матеріалом самостійно, студенти б мали змогу об'єднати свій практичний досвід з пізнанням більш глибоких закономірностей, надійно їх засвоюючи. Саме таку мету ставить перед собою автор, розробляючи цей посібник.

Лабораторна робота «Визначення в'язкості повітря за формулою Пуазейля» не відноситься до простих. Як правило її виконують більш підготовлені студенти. Основна частина теоретичного матеріалу цієї роботи стосується гідро-, аеродинаміки, молекулярної фізики. Гідро-і аеродинаміка не завжди детально розглядаються в курсах фізики на природничих факультетах нефізичних спеціальностей, хоча матеріал цього розділу використовується як базовий і наочний при вивченні подальших розділів фізики: фізичних полів, в т. ч. електростатичного і магнітного, електричного струму. Розбираючись з виведенням формул цієї лабораторної роботи, студенти згадують і застосовують закони І. Ньютона, елементи диференційного і інтегрального числення, що для них є ще однією можливістю повторити цей матеріал.

Ще одним важливим аспектом цієї лабораторної роботи є те, що студентам різних спеціальностей, можна навести приклади явищ в'язкого тертя і використання формули Пуазейля, що будуть пов'язані саме з їх спеціальністю. Хімікам буде корисним зрозуміти принцип роботи крану, яким змінюється швидкість витікання розчинів з бюретки, чи впливу геометричних розмірів трубопроводів на швидкість досягнення вакууму. Для біологів, як приклад, можна навести явища протікання крові в судинах, чи повітря в дихальних шляхах. Геологам корисний приклад переміщення вулканічної лави, чи сповільнення швидкості течії води біля дна водойми. Студентам спеціальності садово-паркове господарство за допомогою формули Пуазейля можна пояснити, як радіус і довжина поливного шлангу впливають на швидкість поливу.

1. Опис руху рідин (газів). Неідеальні рідини (гази)

Динаміка рідин і газів (гідро-, аеродинаміка) це розділ механіки, що вивчає рух зазначених речовин, які іноді називають флюїдами. Багато явищ, що зустрічаються в життєдіяльності людини, пов'язані саме з рухом рідин і газів. Це протікання рідин і газів в трубопроводах, каналах, рух тіл в рідинах, рух повітряних мас в атмосфері. Протягом 17 ст. – 19 ст., завдяки роботам Б. Паскаля (1623–1662), Д. Бернуллі (1700–1782), Л. Ейлера (1707–1773), К. Нав'є (1875–1836), Г. Стокса (1819–1903) були сформульовані основні закономірності, що описують такий рух. В більшості випадків це диференціальні рівняння, що базуються на законах І. Ньютона (1643–1727). Але застосовуються закони Ньютона не для конкретних часток, наприклад молекул, а для невеликих об'ємів.

Корисно з'ясувати декілька уявлень, в рамках яких описується рух рідини чи газу.

На відміну від кристалічних тіл, в яких молекули (атоми) зберігають свої положення більш-менш незмінними, молекули рідин і газів мають велику рухливість і здійснюють постійний хаотичний (тепловий) рух. В газоподібному стані рухливість особливо велика, в рідкому стані вона суттєво менша, але все ж присутня. Завдяки рухливості молекул, ці речовини можуть легко змінювати свою форму. Між молекулами завжди діють сили. В залежності від відстані, це будуть сили притягання (при зростанні відстані) чи відштовхування (при стисканні). Через більш щільне розташування молекул в рідинах їх стисливість мала, на відміну від речовин в газоподібному стані, для яких характерна велика стисливість. Важливою макроскопічною характеристикою стану рідини (газу) є тиск p . Його наявність можна помітити по силі тиску, яка створюється під час стикання молекул рідини чи газу з поверхнями. Обчислюється тиск за формулою $p = F/S$, де F — сила тиску, що діє на поверхню площею S . Одиниці вимірювання тиску — паскаль (Па).

Статичний стан рідини (газу) – випадок коли вказані речовини не здійснюють макроскопічний рух. Рідина (газ) в цьому стані характеризується тиском, який залежить тільки від положення точки в середині рідини (газу) ($p=p(r)$) і завжди діє перпендикулярно до елементу поверхні і не залежить від її орієнтації. В цьому випадку слід розділяти поверхневі сили і об'ємні. Приклад об'ємної сили є сила тяжіння, поверхневої — сили з боку стінок герметичної посудини.

Якщо рідина нестислива – її густина однакова в усіх точках об'єму. Для нестисливих рідин виконується закон Б. Паскаля — тиск, що чиниться на рідину в якійсь точці (не враховуючи сили тяжіння) передається рідиною (газом) в усіх напрямках однаково. З силою тяжіння в рідинах і газах пов'язаний так званий гідростатичний тиск — завдяки притягання кожної молекули до Земної кулі і нашаруванню молекул одна на одну, в кожному прошарку рідини виникає тиск $p=\rho gh$, де ρ — густина рідини (газу), h — висота стовпа рідини (газу) над розглянутим прошарком, g — прискорення вільного падіння.

Стан рідини (газу), що рухається в просторі (його вивчає *гідро-і аеродинаміка*) можна повно описати, якщо для кожної точки простору з координатами (x, y, z) вказати п'ять величин, яких набуває рідина (газ), перебуваючи в малому її околі: три компоненти швидкості $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, тиск $p = p(x, y, x, t)$ і густина $\rho = \rho(x, y, x, t)$. Якщо ці величини залишаються незмінними з часом, такий рух рідини (газу) називається *стаціонарним*. Стаціонарний стан руху встановлюється через деякий час, після того як перестають змінюватись зовнішні сили, що викликають рух рідини (газу). Ми обмежимося розглядом саме стаціонарних випадків.

Якщо густина рідини або газу $\rho(x, y, z, t)$ залишається незмінною, то це випадок *нестисливих* рідин (газів). Рідина в більшості випадків нестислива. Що до газів, якщо його рух відбувається з швидкостями меншими за характерну швидкість поширення звуку в ньому, то його теж можна вважати нестисливим.

Сукупність векторів швидкості $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$, яких набуває рухома рідина (газ), утворюють поле швидкостей (рис. 1, а). Що б отримати загальне уявлення про його конфігурацію користуються лініями течії — сукупністю ліній, дотичні до яких в будь-якій її точці співпадають з напрямками швидкостей рідини (газу) в їх околах (рис. 1, б). Число ліній течії (густина ліній), що проходять біля певної точки, є пропорційним величині швидкості рідини (газу) в околі цієї точки. Лінії струму не перетинаються між собою, інакше, вектор швидкості в точці перетину не можливо було б визначити однозначно (рис. 1, в). Лінії струму можна спостерігати безпосередньо, якщо в рухому рідину (газ) підмішувати невеликі частки барвника і прослідкувати за їх подальшим рухом. Закономірності, виявлені для полів швидкостей в гідродинаміці були узагальнені і поширені на інші типи полів — гравітаційне, електростатичне, магнітне. Їх характеризують величинами, поняття про які виникли при розгляді рухомих рідин (газів).

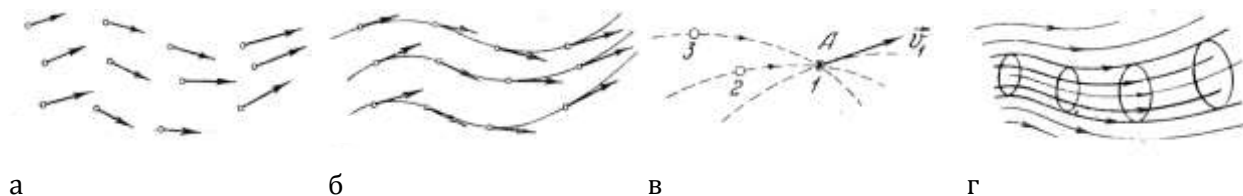


Рис. 1

Об'єм рідини, що обмежений з усіх сторін лініями течії, називається *трубкою течії* (рис. 1, г). З достатнім наближенням можна вважати, що частинки рідини (газу), які під час свого руху потрапили в певну трубку течії, будуть в ній постійно залишатись і не перетинати її бокову поверхню (стінку). Весь потік рідини можна розділити на сукупність трубок течії.

Для рухомих флюїдів можна сформулювати декілька закономірностей. З закону збереження маси, застосованому до стаціонарної течії в трубці течії, випливає закон нерозривності — закон, що описує зміну швидкості часток вздовж трубки течії в залежності від площі її перерізу в тому чи іншому місці.

1.1 Рівняння нерозривності

При рухові через трубку течії, змінного перерізу, маса флюїду, що перетинає переріз трубки 1 за одиницю часу дорівнює масі, що перетинає інший переріз 2: $\rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2$. Якщо $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ — площі перерізів трубки в 1, 2 (рис. 2), достатньо малі, що б можна було вважати відповідні значення швидкостей $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ однаковими на їх поверхні, то об'єм речовини, що їх перетинає за час Δt можна обчислити за формулою $\Delta V = \vec{v} \cdot \vec{S} \Delta t$. Дійсно, об'єм можна порахувати, як добуток площі основи S на висоту h . За одну секунду, площини перерізу досягне вся рідина (газ), які знаходяться від неї на відстані $\Delta l = v \Delta t = v \cdot 1s = v$, тому об'єм знаходимо як: $V = Sv$. Якщо рідина не стислива, то густина ρ залишається незмінною вздовж потоку і рівняння нерозривності набуває спрощеного вигляду: $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Якщо і площа перерізів трубки вздовж неї незмінна, то швидкість рідини (газу) теж буде *постійною*.

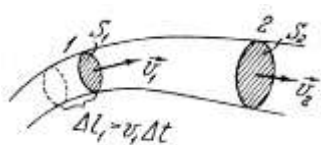


Рис. 2.

1.2 Внутрішнє тертя. Рух неідеальної рідини

Рідкі і особливо газоподібні тіла відрізняються від твердих тим, що вони майже не чинять спротиву зміні своєї форми. Якщо ж рідина (газ) все ж протидіють такій зміні, то вони називаються *в'язкими (неідеальними)*, а сила, що виникає з їх боку називається силою в'язкості, або внутрішнього тертя. Виявилося, що сила в'язкості пропорційна не величині деформації, як в твердих тілах (з-н Р. Гука), а швидкості деформації. Якщо швидкості деформації малі, то в'язкістю рідини можна знехтувати і вважати її ідеальною.

Прикладів рідин з помітною в'язкістю ми зустрічали достатньо — мед, сметана, олія, мастило, розплавлене скло, вулканічна магна (останні дві рідини особливо в'язкі). Нам легко помітити відмінність у в'язкості води і сметани по швидкості, з якою вони витікають з пляшок. Далі ми будемо вести мову саме про рідини, бо саме для них в'язкість більш помітні. Для газів характер закону в'язкого тертя такий же.

Закон в'язкого тертя був встановлений І.Ньютоном. З'ясуємо його особливості.

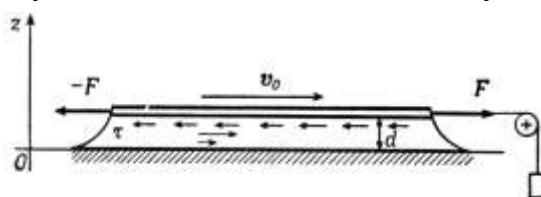


Рис. 3

Якщо спробувати тягнути плиту по поверхні рідини (рис. 3), то виявиться, що для підтримання її постійного (*рівномірного*) руху потрібно постійно прикладати силу F . Згідно законів Ньютона, це буде тільки тоді коли з боку рідини на плиту дія сила, протилежна за напрямком F і рівна їй за модулем. Змінюючи величину діючої сили, ми знову отримаємо рівномірний рух, але вже з іншою швидкістю v_0 . Значить сила в'язкого тертя з боку рідини буде різною для різних швидкостей.

Розглянувши рух не тільки плити, а і рідини між нею і нижньою поверхнею, можна помітити важливі особливості. Виявляється, що рідина розділиться на ряд плоскопаралельних прошарків (ламінальний рух), швидкість руху речовини в яких буде рівномірно спадати від верхнього шару до нижнього.

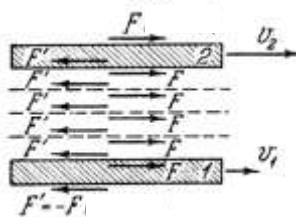


Рис 4

З іншої сторони, утворені прошарки можна розглянути як трубки течії з незмінним перерізом і постійною швидкістю рідини в них, а значить із повністю компенсованими силами, що діють на неї в кожному з них.

Як вже було зазначено, якщо верхня плита рухається рівномірно з швидкістю v_0 згідно з 2-им законом Ньютона, векторна сума сил що на неї діють повинна дорівнює нулю. Значить крім прикладеної зовнішньої сили F на неї діє і інша сила — F' , рівна за модулем, але протилежна за знаком ($F' = -F$). Ця сила гальмування виникає з боку рідини з найближчого прошарку, що межує з плитою $F_{\text{тр}} = F'$. Згідно третього закону Ньютона, на рідину з цього прошарку з боку плити теж діє сила, рівна за модулем, але протилежна за знаком силі тертя: $F_{\text{рід1}} = -F_{\text{тр}} = -(F') = -(-F) = F$. Таким чином до верхнього прошарку рідини сила, що діє на плиту, передалася в незмінному вигляді. Повторивши аналогічні міркування для інших прошарків, ми прийдемо до висновку, що на рідину в кожному з них діють дві сили, рівні за модулем, але протилежні за напрямком — вправо F з боку верхнього прошарку і в ліво F' з боку нижнього. Виходить, що сила, яку ми прикладали до плити і яка підтримує її рух, двічі присутня в усіх рухомих прошарках рідини. Але швидкість руху рідини в усіх прошарках буде різною. Це важливий висновок з 2-го і 3-го законів І. Ньютона, який ми застосували до стаціонарного випадку руху рідини. Зараз ми не розглядаємо, як змінювалась швидкість плити чи рідини в момент початку дії сили, тобто коли рух встановлюється. Ми аналізували той рух, який вже встановився (стаціонарний), тобто триває вже довго в незмінному вигляді. Це може суперечити нашому досвіду, адже рідина і плита на рис. 2 скінченої довжини. Але фізичні міркування дозволяють абстрагуватись від практики і проводити міркування в штучних умовах.

Якщо нижня пластина буде рухомою, але зв'язаною з нерухомою стінкою пружиною, то по величині деформації пружини ми зможемо визначити силу дії на цю пластину прилеглого шару рідини і переконатися, що вона рівна F (рис. 5).

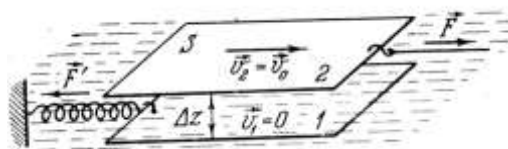


Рис 5

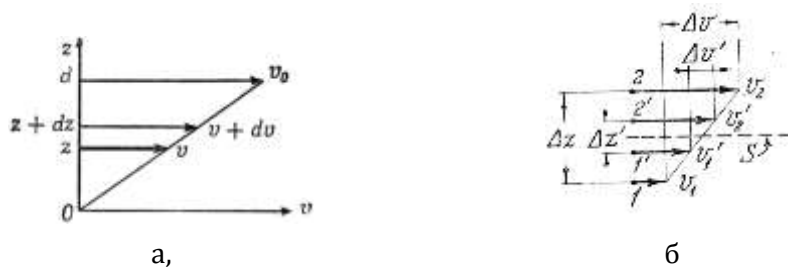


Рис. 6

Як вже зазначалось, рідина в об'ємі між пластинами розбивається на шари з різною її швидкістю руху в кожному з них. Завдяки адсорбції (притягання молекул рідини до твердого тіла), швидкість рідини верхнього шару, який безпосередньо прилягає до рухомої плити, співпадає з її швидкістю v_0 . Швидкість найнижчого шару рідини співпадає з швидкістю нижньої нерухомої пластинки, тобто $v=0$. Середні ж шари рідини набувають проміжних значень швидкості, величини яких лінійно змінюються між граничними (рис. 6). І. Ньютон показав,

що для більшості рідин, сила опору з їх боку, яка гальмує рух верхньої пластинки пропорційна площі пластинки S , відношенню різниці швидкостей між шарами рідини Δv до різниці відстаней між ними Δz ($\Delta v/\Delta z$ — градієнту швидкості) і коефіцієнту, що пов'язаний з властивостями рідини і не залежить від S і v — коефіцієнту в'язкості η : $\vec{F} = -\eta S \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta z}$.

Коефіцієнт в'язкості η вимірюється в Па·с.

На рис. 6 б показано приклад розрахунку градієнту для різних прошарків. На цьому малюнку площина площею S взята всередині потоку, а вибрані шари між якими рахуються різниці (1-2, 1'-2') лежать симетрично $\frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{\Delta v'}{\Delta z'}$. Ці відношення можна записати для нескінченно малих: $\frac{dv}{dz}$ — для стаціонарного випадку (відсутність залежності швидкості від часу); $\frac{\partial v}{\partial z}$ — для нестаціонарного випадку (є залежність швидкості від часу).

Сили, що виникають в рідинах (газах), як наслідок протидії стисканню-розтягуванню — нормальні (перпендикулярні) до поверхні цих речовин. Внаслідок рівномірного розподілу їх величини по об'єму і поверхні їх можна охарактеризувати відношенням сили до величини площі (F/S , або dF/dS) — тиском (нормальним напруженням). Якщо з боку рідини виникають сили в'язкого тертя, то ми можемо скласти подібне відношення, тільки в ньому вже сила буде дотичною до поверхні з площею S : $F_{\text{дотич}}/S = dF_{\text{дотич}}/dS = \tau$ — дотичне напруження.

2. Рух неідеальних рідин (газів) в трубках. Формула Пуазейля

Як ми вже з'ясували, під час руху шарів рідини (газу) один відносно одного (з різними швидкостями), на поверхні, що їх розділяє виникають дотичні сили — сили внутрішнього тертя, або сили в'язкості.

Дію сил в'язкості при протіканні рідини через трубку круглого перерізу експериментально можна виявити за спадом тиску вздовж напрямку її протікання. Для цього, слід встановити установку зображену (рис. 7а). Горизонтальна трубка, що одним кінцем під'єднана до бака з водою і з вентиля на іншому кінці, має вертикальні тонкі трубки в декількох місцях бокової поверхні. Останні відіграють роль манометрів — висота, на яку піднімиться рідина в кожній з них, пропорційна тиску в місті їх під'єднання ($p \sim \rho h g$). Коли в горизонтальній трубці рух рідини не відбувається (вентиль перекритий), рівень рідини в вертикальних трубках однаковий і співпадає з рівнем води в баку, що свідчить про однаковий тиск в усьому об'ємі рідини (статичний стан, виконується закон Паскаля). Рідина піднімається в трубках завдяки гідростатичному тиску, що створюється стовпом рідини в баку. Як тільки вентиль відкривається і рідина починає витікати, висоти підйому рівня рідини в вертикальних трубках будуть зменшуватись в напрямку протікання рідини, що свідчить про зменшення тиску вздовж течії рідини.

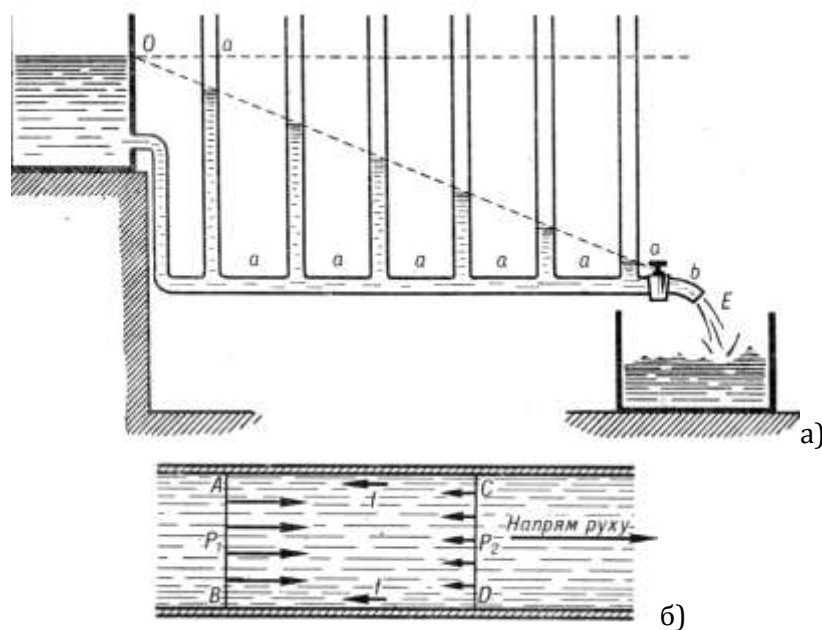


Рис 7 (а, б)

Якби в рідині діяли тільки сили тиску, то за наявності вказаної різниці, рідина повинна була б рухатись прискорено. Але згідно закону неперервності, середня швидкість руху рідини в усіх перерізах труби з незмінним діаметром повинна бути однаковою. Значить, під час руху рідини діють ще якісь сили, які компенсують сили тиску, це сили в'язкого опору (рис. 7, б).

Враховуючи симетрію досліду, можна припустити, що рух рідини буде ламінарний, а трубки течії будуть мати вигляд трубок, кожна з яких рухатиметься з різною швидкістю (рис. 8) Максимальна швидкість буде в циліндричних (трубчатих) шарах малого діаметра біля осі трубки, мінімальна — в шарах, що прилягають до внутрішньої поверхні трубки.

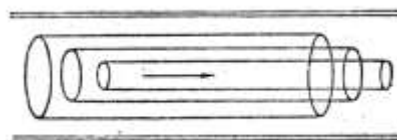


Рис. 8

2.1 Характер зміни швидкості

Розглянемо стаціонарну течію в'язкої рідини по трубці круглого перерізу. Виділимо уявний циліндричний (трубчатий) шар довжиною l , внутрішнім радіусом r , з нескінченно малою товщиною стінки dr — зовнішнім радіусом $r+dr$ (рис. 9 а, б).



Рис. 9

Силу в'язкого тертя, що діє на внутрішню поверхню виділеного циліндра з боку рідини, що прилягає до нього з середини можна розрахувати за формулою Ньютона для сили в'язкого тертя: $F_1 = \eta S \frac{dv}{dr} = -\eta l 2\pi r \frac{dv}{dr}$. Ця сила направлена по напрямку руху рідини (вправо), бо швидкість рідини в об'ємі, що охоплюється циліндричною поверхнею більша, рух цього об'єму буде гальмуватись трубкою, що розглядається. Градієнт швидкості є від'ємною величиною (позитивний приріст вздовж радіусу від центру до краю відповідає негативному приросту швидкості). Тому перед виразом поставлено знак «—». Площа внутрішньої поверхні розрахована як добуток довжини внутрішнього обода циліндра радіусом r ($2\pi r$) на довжину його твірної l .

Шар рідини, що прилягає до зовнішньої поверхні циліндру, гальмує його з силою $F_2 = \eta l 2\pi(r + dr) \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right)$, направленою вліво. В цій формулі врахований більший радіус зовнішньої поверхні циліндричного шару $(r+dr)$ і, як наслідок більша площа бічної поверхні $2\pi(r + dr)l$. Крім цього порахований приріст величини градієнту швидкості, пов'язаний з збільшенням відстані від центру на dr , через похідну градієнту: $\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr$.

Різниця сил тиску на торцях вибраного циліндричного шару обчислюється за формулою: $\Delta F = p_1 dS - p_2 dS = (p_1 - p_2) \cdot dS = (p_1 - p_2) \cdot 2\pi r dr$. Площа торцевої поверхні циліндра для випадку нескінченно малої її товщини dr можна поррахувати як добуток довжини кола радіусом r ($2\pi r$) на товщину стінки трубки — dr .

Згідно рівняння неперервності швидкість рідини в циліндричному шарі повинна бути постійною, тому сума всіх діючих сил повинна бути рівна нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + dp d\vec{s} = 0$. Запишемо це рівняння через проекції сил на вісь, що співпадає з віссю трубки: $F_1 - F_2 + dp \cdot ds = 0$.

$$-\eta l 2\pi r \frac{dv}{dr} + \eta l 2\pi(r + dr) \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right) = (p_1 - p_2) \cdot 2\pi r dr.$$

Розкривши дужки і знехтувавши малими доданком другого порядку малості по відношенню до dr ($\frac{d^2v}{dr^2} \cdot dr \cdot dr$), отримаємо:

$$2\pi\eta l \frac{dv}{dr} + 2\pi\eta l r \frac{d^2v}{dr^2} = 2\pi\eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi r (p_1 - p_2)$$

Двічі проінтегрувавши, отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} \frac{dv(r)}{dr} &= -\frac{(p_1 - p_2)r}{2\eta l} + \frac{C}{r} \\ v(r) &= -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} \cdot \frac{r^2}{2} + C \cdot \ln(r) + B \end{aligned}$$

Константи інтегрування визначаємо з граничних умов. Коли $r=0$ (вісь трубки) значення логарифма $\ln(r)$ прагне до мінус нескінченності, що суперечить здоровому глузду. Тому $C=0$. На границі трубки $v(R)=0$, звідки $B = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot R^2$

Таким чином закон зміни швидкості руху рідини в шарах на різній відстані від центра трубки має такий вигляд:

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2)$$

Якщо від кожної точки площини перерізу труби відкласти вектори швидкості, що відповідають швидкості рідини в цих точках, то їх кінці утворять поверхню обертання, мериді-

ональний переріз якого буде параболою (рис. 10) — течія має параболічний профіль швидкостей.

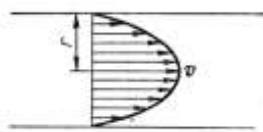


Рис. 10

2.2 Формула обчислення об'єму рідини (газу), що протікають через циліндричну трубку за одиницю часу

Ми з'ясували характер зміни швидкості руху рідини в шарах, що розташовані на різній відстані від центру трубки. Швидкість максимальна в прошарках малого радіусу (біля осі) і майже нульова для шарів з радіусом, близьким до радіусу трубки. Загальна залежність має вигляд: $v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2)$. В наслідок рівняння неперервності, швидкість рідини в усіх циліндричних прошарках буде залишатися незмінною.

Розділимо об'єм рухомої рідини на систему циліндричних шарів (рис. 11), співвісних з віссю трубки, так що б їх товщина була мала ($dr \rightarrow 0$) і швидкість руху рідини (газу) в кожному з них можна було б вважати постійною. Загального об'єму рідини (газу), що витікає з трубки за одиницю часу буде дорівнювати сумі об'ємів, що витекли з кожного циліндричного шару $Q = \frac{V}{t} = \sum dQ_i$. З кожного циліндричного шару за одиницю часу витече об'єм $dQ = v(r) \cdot dS(r) = v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$, а загальний об'єм ми знайдемо замінивши сумування інтегруванням.

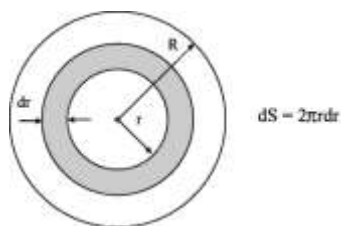


Рис. 11.

$$Q = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r dr = \int_0^R \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta l}$$

Таким чином, загальний об'єм рідини(газу), що витікає за одиницю часу з трубки радіусом R , довжиною l , якщо на її кінцях існує різниця тисків $(p_1 - p_2)$, обчислюється за формулою:

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta l}$$

Цей вираз незалежно експериментально встановили в 1838 р. інженер Г. Хаген (1797–1884) і фізіолог Ж.Л. Пуазейль (1779–1869). Останній проводив дослідження руху крові в судинах. Теоретично формула була отримана Дж. Г. Стоксом в 1845 році.

Величини $Q = V/t$, p_1 , p_2 , R , l , які входять в цю формулу легко визначити експериментально і вже знаючи їх можна обчислити в'язкість рідини. Якщо ж потрібно визначити в'язкість газу за цією формулою, як в нашій лабораторній роботі, то слід притримуватись обмежень, обумовлених значною стисливістю газів. Так як тиск вздовж течії газу через трубку змінюється, то його об'єм не буде зберігатись сталим. Згідно закону Бойля-Маріотта, в ізотерміч-

них умовах сталим залишається добуток тиску на об'єм: pV . Тому для газів, формула Пуазейля набуває іншого вигляду:

$$Q = \frac{(p_1^2 - p_2^2)\pi R^4}{16\eta l \cdot p_2}$$

Для того що б нею скористатись, потрібні манометри, які вимірюють тиск на початку і в кінці капіляру, а не манометр різниці тисків, як в лабораторній установці [1]. Тому вимірювання в'язкості повітря слід проводити при невеликих витратах, коли $p_1 - p_2 \ll p_2$.

Як впливає з формули Пуазейля, при заданій різниці тисків загальна кількість витікаючої рідини в одиницю часу різко зменшується із зменшенням радіуса труби. Навпаки, при заданій кількості витікаючої рідини спад тиску на одиницю довжини труби $(p_1 - p_2)/l$ різко зростає на ділянках із малим радіусом трубки. Останній ефект можна продемонструвати, з'єднавши послідовно три відрізки труб різного діаметра, що мають манометричні трубки. На однакових по довжині ділянках труби спад тиску у вузькій частині значно більший, ніж у широкій. Більший спад тиску у вузькій частині потрібний, що б рідина рухалась з більшою швидкістю, тим самим досягається сталість витрат рідини вздовж всієї трубки.

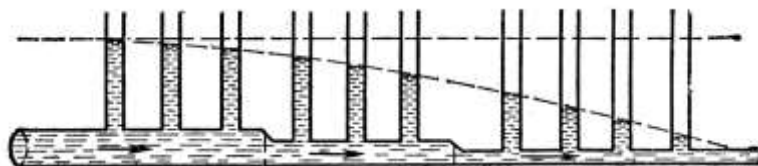


Рис. 12

Література

1. ФІЗИЧНИЙ ПРАКТИКУМ. ЧАСТИНА І. Механіка, молекулярна фізика, електрика та магнетизм. Навчальний посібник / Боровий М.О., Лисов В.І., Козаченко В.В., Цареградська Т.Л., Овсієнко І.В., Жабітенко О.М. – К. , 2012. – 289 с. (Механіка, молекулярна фізика) https://gen.phys.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2022/09/FP1_New.pdf
2. Кучеренко І.М., І.Т. Горбачук, П.П. Луцик Загальний курс фізики. Т.1. —К.: Техніка, 1999, с. 154-170, с. 348-352